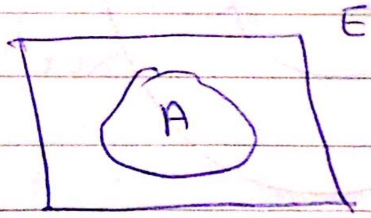
19.04.16

$$\left.\begin{array}{l}(E,\rho)\\ A\subseteq B\\ B \text{ ολικά φραγμένο}\end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ ολικά φραγμένο}$$

• (E,ρ) ολικά φραγμένος μ.χ.

$A \subseteq E$

$\Rightarrow A$ ολικά φραγμένο



Απόδειξη

Θδο A ολικά φραγμένο

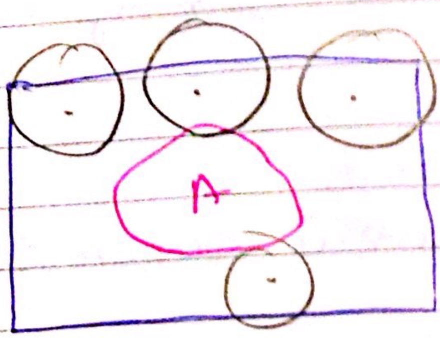
Θεωρούμε ένα $\varepsilon > 0$. Θδο $\exists D \subseteq A$, D πεπερασμένο

ώστε
$$A \subseteq \bigcup_{x \in D} B(x, \varepsilon)$$
σταθεροποιούμε το ε

$$A = \bigcup_{x \in D} B_{\rho_n}(x, \varepsilon)$$

$\exists F \subseteq E$, F πεπερασμένο

$$E = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$$



αφού οι μπάλες καλύπτουν όλο το E, θα καλύπτουν και όλο το A

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$$

θα ξεχάσουμε τώρα τις μπάλες που δεν καλύπτουν το A

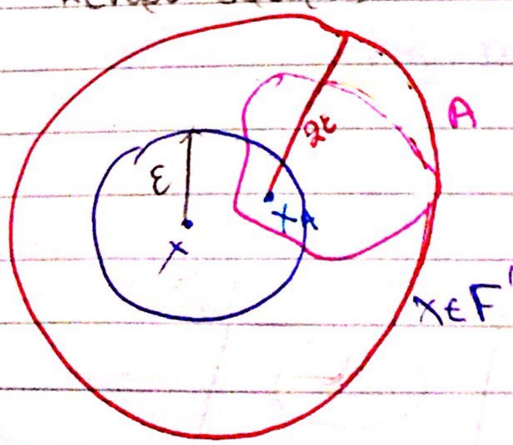
$F' = \{x \in F : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\} \subseteq F$

F' πεπερασμένο

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{x \in F'} B(x, \varepsilon), \quad (*)$$

$x \in F' \subseteq F \rightarrow x \in E$

κέντρο σφαίρας



αυτές οι μπάλες είναι πεπερασμένες

για κάθε μπάλα διαλέγουμε x_A

$\forall x \in F'$

διαλέγουμε ένα $x_A \in A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$

→ είναι και το στο A και στην άλλη μπάλα

Η μπάλα με κέντρο x_A και ακτίνα 2ε περιέχει την άλλη μπάλα, δηλ.

$$B(x_A, 2\varepsilon) \supseteq B(x,\varepsilon)$$

Άρα η (*) μπορεί να γραφεί:

φραγμένο

$$A \subseteq \bigcup_{x\in F'} B(x,\varepsilon) \subseteq \bigcup_{x_A} B(x_A, 2\varepsilon)$$

$\Rightarrow$ A ολικά φραγμένο

• Είχαμε δει $(\ ,\ )$ ολικά φραγμένο στο $\mathbb{R}$

Θ.δ.ο $A \subseteq \mathbb{R}$, A φραγμένο $\Rightarrow$ A ολικά φραγμένο

Απόδειξη

Αφού το διάστημα ολικά φραγμένο, προφανώς A ολικά φραγμένο (?) (δεν άκουσα)

ΠΡΟΤΑΣΗ $f:(E_1,\rho_1)\to(E_2,\rho_1)$ ομοιόμορφα συνεχής, $f(E_1)=E_2$, (E_1,ρ_1) ολικά φραγμένος $\Rightarrow$ E_2 ολικά φραγμένος

Απόδειξη

Αν $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x,y\in E_1$, αν $\rho_1(x,y)<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x),f(y))<\varepsilon$

(E_1,ρ_1) ολ. φραγμ. $\Rightarrow$

Στόχος: $E_2 = \bigcup_{y\in D} B(y,\varepsilon)$, $D\subseteq E_2$ πεπερασμένο

$\Rightarrow \exists D_1\subseteq E_1$ πεπερ.

$$E_1 = \bigcup_{x\in D_1} B_{\rho_1}(x,\delta)$$

παίρνουμε τις εικόνες

$$\Rightarrow E_2 = f(E_1) = f\left(\bigcup_{x\in D_1} B_{\rho_1}(x,\delta)\right) = \bigcup_{x\in D_1} f(B_{\rho_1}(x,\delta)) \overset{(*)}{\subseteq} \bigcup_{x\in D_1} B_{\rho_2}(f(x),\varepsilon)$$

Η (*) ισχύει επειδή:

$$f(\underbrace{B_{\rho_1}(x,\delta)}_{x'}) \subseteq B_{\rho_2}(f(x),\varepsilon)$$

Έστω $x' \in B_{\rho_1}(x,\delta) \Rightarrow \rho_1(x',x)<\delta$
$\Rightarrow \rho_2(f(x'),f(x))<\varepsilon$
$\Rightarrow f(x') \in B_{\rho_2}(f(x),\varepsilon)$

δηλ. $f(x)$ είναι τα νέα κέντρα

Δείξαμε ότι: $E_2 \subseteq \bigcup_{x\in D_1} B(f(x),\varepsilon)$

$D_2 = \{f(x) : x\in D_1\} = f(D_1) \Rightarrow E_2 \subseteq \bigcup_{y\in D_2} B(y,\varepsilon)$

ο.ε.δ.

• Ψάχναμε:
$f:(E_1,\rho_1)\to(E_2,\rho_2)$ επί
συνεχής
(E_1,ρ_1) ολικά φραγμ. $f(E_1)=E_2$ όχι ολικά φραγμ.

$f:(0,1)\to\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$

$(0,1)$ ολ. φραγμ.
$f(0,1)=(1,\infty)$ όχι ολικά φραγμ.

ΠΡΟΤΑΣΗ (E_i,ρ_i) γ.χ. $i=1,2,\dots,n$ ολικά φραγμένος
$\Rightarrow (E,\rho)$ ολικά φραγμένος
$E=E_1\times\dots\times E_n$

ΠΡΟΤΑΣΗ A ολικά φραγμένο υποσύνολο του (E,ρ)
$\Rightarrow \bar{A}$ ολικά φραγμένο

$A \subseteq \bar{A}$

π.χ. $\delta(A) < +\infty$
$\delta(\bar{A})$

η διάμετρος παραμένει πεπερασμένη

Απόδειξη
Υποθέτουμε ότι $A \subseteq (E,\rho)$ ολικά φραγμένο

$\varepsilon > 0$ (Στόχος: $\bar{A}$ ολικά φραγμ.)

Θ.δ.ο. $\exists D \subseteq \bar{A}$, $\bar{A} \subseteq \bigcup_{x \in D} B(x,\varepsilon)$

A ολ. φραγμ. $\Rightarrow \exists D_1 \subseteq A \subseteq \bar{A}$, $A \subseteq \bigcup_{x \in D_1} B(x, \frac{\varepsilon}{2})$

Scanned by CamScanner

$\bar{A} \subseteq \overline{\bigcup_{x\in D_1} B(x, \frac{\varepsilon}{2})}$

Υπόθεση $\quad A \subseteq \bigcup_{x\in D_1} B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$

ΘΔΟ $\longrightarrow \quad \bar{A} \subseteq \bigcup_{x\in D_1} B(x, \varepsilon)$

Έστω $y \in \bar{A}$.
$\Downarrow$
για το $\frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \exists x_0 \in A \quad \rho(x_0, y) < \frac{\varepsilon}{2}$

$x_0 \in A \Rightarrow \exists x \in D_1 \; , \; x_0 \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \rho(x_0, x) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \rho(x_0, y) < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(x,y) < \varepsilon \quad \text{και άρα} \quad y \in B(y, \varepsilon).$$

H/W:
Άσκηση: $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subseteq B_{κλ}(x_0, \varepsilon) \subseteq \underbrace{B(x_0, n)}_{\text{ανοιχτή μπάλα}}$
$x_0 \in (E, \rho)$
$\forall \; n > \varepsilon > 0$

Υπόδειξη: $\quad B_{κλ}(x_0, \varepsilon) = \{ x : \rho(x, x_0) \leq \varepsilon \}$
$B_{κλ}(x_0, \varepsilon) = \{ x : \rho(x, x_0) \leq \varepsilon \}$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κριτήριο) (E, ρ) ολικά φραγμένος αν-ν $\forall (x_n)_n \subseteq E$
$\exists (x_{k_n})_n$ βασική
δεν ξέρουμε αν συγκλίνει
(Χωρίς Απόδειξη)

ΟΡΙΣΜΟΣ (E,ρ) ακολουθιακά συμπαγής αν-ν κάθε $(x_n)_n \subseteq (E,\rho)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

$[0,1]$ ακολ. συμπαγής

$\underbrace{\bullet\ (E,\rho) \text{ ακολ. συμπαγής}}_{(1)} \Rightarrow$ ολικά φραγμένος $\Rightarrow$ πλήρης

Απόδειξη

Έστω $(x_n)_n \subseteq (E,\rho)$ βασική.

Θδο συγκλίνει σε κάποιο $x \in E$

$(1) \to \exists x_{k_n} \to x$

$\Rightarrow x_n \to x$

ΠΡΟΤΑΣΗ (E,ρ) ολικά φραγμένος μ.χ. και πλήρης $\Rightarrow (E,\rho)$ ακολ. συμπαγής

Απόδειξη

Θέλουμε ν.δ.ο. (E,ρ) ακολ συμ.

Έστω $(x_n)_n \subseteq E$.

Θ.δ.ο. $\exists\, x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$ (υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία)

Εφόσον (E,ρ) ολ φραγ $\to \exists (x_{k_n})_n$ υπακολ της (x_n), βασική και (E,ρ) πλήρης $\Rightarrow x_{k_n}$ συγκλίνουσα

→ στο $\mathbb{R}$ θα λέγαμε σκέτο φραγμένα

Άσκηση: $A, B \subseteq (E, \rho)$ ολικά φραγμένα.
Ν.δ.ο. $A \cap B$, $A \cup B$ ολικά φραγμένα.

Λύση

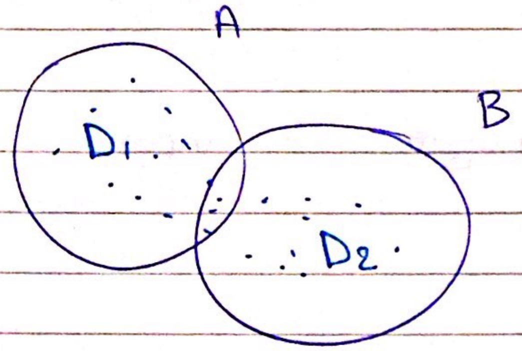
$A \cap B \subseteq A$
$A \cap B \subseteq B$ $\Rightarrow$ $A \cap B$ ολικά φραγμένο

Έστω $\varepsilon > 0$ (το σταθεροποιούμε)
$\Rightarrow \exists D_1 \subseteq A$ πεπερ. έτσι ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{x \in D_1} B(x, \varepsilon)$$

Επίσης, $\exists D_2 \subseteq B$ πεπερ. έτσι ώστε

$$B \subseteq \bigcup_{y \in D_2} B(y, \varepsilon)$$



$$A \cup B \subseteq \bigcup_{z \in D_1 \cup D_2} B(z, \varepsilon) \Rightarrow A \cup B \text{ ολικά φραγμένο}$$

Β' τρόπος:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ ολ. φραγμ.} \Rightarrow \bar{A} \text{ ολ. φραγμ.} \\ B \quad '' \quad \Rightarrow \bar{B} \quad '' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \\ A \cup B \subseteq \overline{A \cup B} \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots$$

αλλά πρέπει πολύ να πάμε πιο από αυτό που κάναμε πριν.

Άσκηση: A ολικά φραγμένο

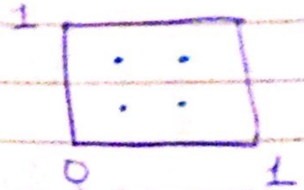
ΝΔΟ $\exists D \subseteq A$ τω D αριθμήσιμο $\subseteq A$ με $\bar{D} = A$

Λύση

πχ

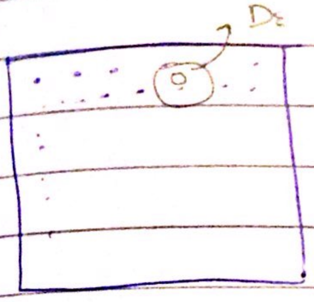
$A = (0,1)$ ολ. φρ.

$\exists D_1 \subseteq A$, $\bar{D}_1 = A$, D_1 αριθμ.



$\varepsilon > 0$, $\exists D_\varepsilon \subseteq A$ πεπερ. $A \subseteq \bigcup_{x \in D_\varepsilon} B(x, \varepsilon)$

D_ε, ε-πυκνό $\subseteq A$



$E = [0,1]^2$
όσο μικραίνω το ε, το πλέγμα αυτό πυκνώνει

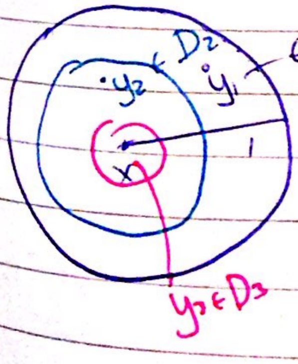
Για $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists D_1 \subseteq A$, πεπερ. : $A \subseteq \bigcup_{x \in D_1} B(x,1)$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists D_2 \subseteq A$, πεπερ : $A \subseteq \bigcup_{x \in D_2} B\left(x, \frac{1}{2}\right)$

όσο μικραίνει το ε τόσο πιο κοντά είμαι στο x

$\varepsilon = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \exists D_\nu \subseteq A$, πεπερ : $A \underset{x \in D_\nu}{\subseteq} B\left(x, \frac{1}{\nu}\right)$

⋮



Θέτουμε $D = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_\nu$, αριθμ., ως ένωση αριθμ. (πεπερ)

$D \subseteq A$, $\underbrace{\bar{D} \supseteq A}$

Έστω $y \in A$. ΝΔΟ $y \in \bar{D}$.

Α.ν.δ.ο. $B(y,\varepsilon)\cap D \neq \emptyset \quad , \forall \varepsilon>0$

Έστω $\varepsilon>0$.

$y\in A \Rightarrow \exists \nu\in \mathbb{N} : \frac{1}{\nu}<\varepsilon$

$\Rightarrow \exists z\in D_\nu : \rho(y,z)<\frac{1}{\nu}<\varepsilon$

$\Rightarrow \exists z\in D_\nu \subseteq D : \rho(y,z)<\varepsilon$

Άρα τελικά:

$$B(y,\varepsilon)\cap\left(\bigcup D_\nu\right)\neq\emptyset$$

- $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in \mathbb{Z}}[n,n+1]$

$\overline{D}_n=[n,n+1]$

$D=\bigcup_n D_n \quad , \quad \overline{D}=\mathbb{R}$

Αυτό ισχύει για το $\mathbb{R}$ παρόλο που δεν είναι ολ. φρ.

- Γυρνάμε στην άσκηση: $\underbrace{\overline{B(x_0,\varepsilon)}}\subseteq \underbrace{B_{κλ}(x_0,\varepsilon)}_{0<\varepsilon<n}\subseteq B(x_0,n)$, (*)

Δηλ. η (*) γράφεται

$$\overline{\{y\in E: \rho(y,x_0)<\varepsilon\}} \subseteq \{y\in E: \rho(y,x_0)\leq\varepsilon\}$$

Ας δούμε γιατί ισχύει αυτό

$x\in\overline{B(x_0,\varepsilon)} \Rightarrow \exists y_n \subseteq B(x_0,\varepsilon) \rightsquigarrow \rho(y_n,x_0)<\varepsilon$

$y_n \xrightarrow{\rho} x \Rightarrow \rho(y_n,x)\to 0$

$$\rho(x, x_0) \leq \rho(x, y_n) + \rho(y_n, x_0)$$
$$< \rho(x, y_n) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \rho(x, x_0) \leq \varepsilon$$

Τότε $\rho(x, x_0) \leq \varepsilon < n$ δηλ. ανήκει και στην ανοιχτή μπάλα.